En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de $4p$, *que es el coeficiente del término de primer grado.*

Ejemplo. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. Por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py. \tag{4}$$

Como la parábola pasa por el punto $(4, -2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación (4), y tenemos

$$16 = 4p(-2),$$

de donde, $p = -2$, y la ecuación buscada es

$$x^2 = -8y.$$

También, por el teorema 1, el foco es el punto $(0, p)$, o sea, $(0, -2)$, la ecuación de la directriz es

$$y = -p,$$

o sea, $$y = 2,$$

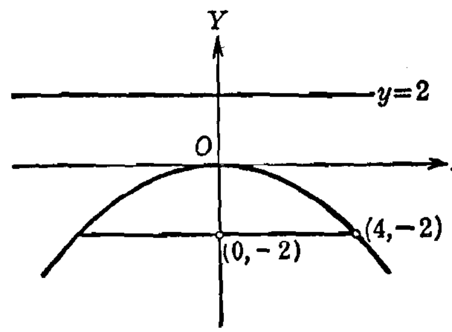

Fig. 78

y la longitud del lado recto es $|4p| = 8$. En la figura 78, se ha trazado el lugar geométrico, foco, directriz y lado recto.

EJERCICIOS. Grupo 23

Dibujar para cada ejercicio la gráfica correspondiente.

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada, y discutir el lugar geométrico correspondiente.

1. $y^2 = 12x$.
2. $x^2 = 12y$.
3. $y^2 + 8x = 0$.
4. $x^2 + 2y = 0$.
5. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$.
6. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, cuando se conocen el foco y la directriz.
7. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, si se dan el foco y el vértice.
8. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(3, 0)$.
9. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0, -3)$.
10. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $y - 5 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $x + 5 = 0$.

12. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

13. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

14. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.

15. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $y^2 = 4px$ es igual a $|x_1 + p|$.

16. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$ cuya ordenada es igual a 6.

17. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 4y = 0$.

Faltó

19. Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

20. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

21. Hallar la ecuación de una parábola tomando como ejes X y Y, el eje y la directriz respectivamente.

En cada uno de los ejercicios 22-25, aplicando la definición de la parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados. Reducir la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

22. Foco $(3, 4)$, directriz $x - 1 = 0$.

23. Foco $(3, -5)$, directriz $y - 1 = 0$.

24. Vértice $(2, 0)$, foco $(0, 0)$.

25. Foco $(-1, 1)$, directriz $x + y - 5 = 0$.

56. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado. Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola (fig. 79) cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje X. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k), se sigue, por el teorema 1 del Artículo 55, que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

$$y'^2 = 4px', \tag{1}$$